

---

# Fachlehrpläne

## Gymnasium: Mathematik 12 (Vertiefungskurs)

gültig ab Schuljahr 2024/25

Die unterrichtende Lehrkraft des jeweiligen Kurses wählt drei der fünf Module aus.

### M12 1: Modul „Komplexe Zahlen“

---

#### Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- begründen die Notwendigkeit, die Menge der reellen Zahlen zur Menge der komplexen Zahlen zu erweitern, und sind sich der kulturhistorischen Bedeutung dieser Zahlbereichserweiterung bewusst.
- stellen komplexe Zahlen in der algebraischen Form  $z = a + bi$  dar, berechnen die Werte von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten zweier komplexer Zahlen und deuten Addition und Subtraktion geometrisch mithilfe der Darstellung als Vektoren in der Gauß'schen Zahlenebene.
- stellen komplexe Zahlen in der Polarform  $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$  dar, wechseln sicher zwischen dieser und der algebraischen Form und deuten Multiplikation und Division geometrisch. Sie entscheiden bei Berechnungen reflektiert, welche Darstellungsform jeweils vorteilhaft ist.
- lösen quadratische Gleichungen über der Grundmenge der komplexen Zahlen. Sie erläutern, dass jede quadratische Gleichung in der Menge der komplexen Zahlen lösbar ist.
- berechnen Lösungen von Kreisteilungsgleichungen der Form  $z^n = 1$  und interpretieren die so erhaltenen n-ten Einheitswurzeln am Einheitskreis.
- untersuchen im Zusammenhang mit der Mandelbrot-Menge Folgen komplexer Zahlen auf Beschränktheit. Sie veranschaulichen die Mandelbrot-Menge mithilfe einer geeigneten Software.

## M12 2: Modul „Folgen und Reihen“

---

### Kompetenzerwartungen

#### Die Schülerinnen und Schüler ...

- beweisen mathematische Aussagen mithilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion.
- ermitteln die Folgenglieder explizit definierter Folgen (z. B. arithmetische Folge, geometrische Folge) und rekursiv definierter Folgen (z. B. Fibonacci-Folge, Folge der Näherungswerte beim Newton-Verfahren). Umgekehrt stellen sie zu vorgegebenen Folgengliedern ein geeignetes Bildungsgesetz auf.
- untersuchen Folgen in Bezug auf Monotonie und Beschränktheit, schließen daraus ggf. auf die Konvergenz und bestimmen bei konvergenten Folgen deren Grenzwert.
- beschreiben Reihen als Folgen von Partialsummen und begründen die Divergenz der harmonischen Reihe anhand geeigneter Abschätzungen. Sie erläutern, unter welcher Bedingung geometrische Reihen konvergieren, und berechnen in diesen Fällen den jeweiligen Grenzwert. Sie nutzen geometrische Reihen in Anwendungen, z. B. bei der Umwandlung periodischer Dezimalbrüche in Brüche, bei fraktalen Iterationsprozessen (z. B. Koch'sche Schneeflockenkurve, Sierpinski-Dreieck) oder in der Finanzmathematik.
- erläutern die Grundidee der Konstruktion von Taylorpolynomen n-ten Grades an der Entwicklungsstelle  $x = 0$  und nähern u. a. die natürliche Exponentialfunktion durch Taylorpolynome an; dabei nutzen sie eine dynamische Geometriesoftware, um die zu den Taylorpolynomen gehörenden Graphen zu veranschaulichen und die Konvergenz dieser Folge plausibel zu machen. Ausgehend von der Taylorentwicklung der natürlichen Exponentialfunktion geben sie die Reihendarstellung der Euler'schen Zahl  $e$  an.

## M12 3: Modul „Matrizen“

---

### Kompetenzerwartungen

#### Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben einstufige Übergangsprozesse (z. B. Wechselverhalten von Kunden, Populationsentwicklung) mithilfe von linearen Gleichungssystemen, Übergangsgraphen, Tabellen und

Übergangsmatrizen und wandeln die verschiedenen Darstellungen flexibel ineinander um. Sie interpretieren Einträge von Übergangsmatrizen im Sachzusammenhang.

- notieren lineare Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen und Vektoren (z. B. bei der Bestimmung des Terms einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten dreier Parabelpunkte) und lösen diese mithilfe des Gauß-Algorithmus.
- addieren Matrizen und multiplizieren Matrizen mit einem Skalar. Sie berechnen das Produkt zweier Matrizen und deuten im Falle quadratischer Matrizen diese Multiplikation und ihr Ergebnis im Zusammenhang mit mehrstufigen Prozessen.
- erläutern, inwieweit Rechengesetze, die sie für die Multiplikation reeller Zahlen kennen, auch für die Matrizenmultiplikation zutreffen, bestimmen von invertierbaren Matrizen das Inverse und deuten dieses im Zusammenhang mit Übergangsprozessen.
- berechnen Potenzen von Matrizen und verwenden zur Berechnung auch eine geeignete Software. Sie bestimmen bei mehrstufigen Prozessen ggf. Fixvektoren und deuten diese im Sachzusammenhang.
- berechnen für Übergangsprozesse mit absorbierenden Zuständen (z. B. bei Glücksspielen) Absorptionswahrscheinlichkeiten sowohl näherungsweise durch mehrfache Hintereinanderausführung als auch exakt durch Lösen eines entsprechenden Gleichungssystems.

## M12 4: Modul „Zahlentheorie und Kryptologie“

---

### Kompetenzerwartungen

#### Die Schülerinnen und Schüler ...

- erläutern die Funktionsweise des euklidischen sowie des erweiterten euklidischen Algorithmus und wenden beide an Beispielen an. Zur Implementierung eines der beiden Algorithmen nutzen sie ein Tabellenkalkulationsprogramm oder eine andere geeignete Programmierumgebung.
- verwenden die modulare Arithmetik, um unter anderem Werte von Potenzen modulo  $n$ , insbesondere im Fall großer Exponenten, effizient zu berechnen; sie lösen unter Bezug auf den chinesischen Restsatz simultane Kongruenzen.
- beweisen den kleinen Satz von Fermat.
- erläutern das Prinzip des RSA-Verfahrens als Beispiel für eine asymmetrische Verschlüsselung, verschlüsseln Nachrichten mithilfe

dieses Verfahrens und machen plausibel, dass die zugehörige Entschlüsselung wieder die ursprüngliche Nachricht ergibt. Sie sind sich dabei der gesellschaftlichen Bedeutung der Sicherheit moderner Verschlüsselungsverfahren bewusst.

- erläutern die Funktionsweise eines Primzahltests (z. B. Miller-Rabin-Test) oder eines Faktorisierungsverfahrens (z. B. quadratisches Sieb).

## M12 5: Modul „Statistik“

---

### Kompetenzerwartungen

#### Die Schülerinnen und Schüler ...

- erläutern anhand von Beispielen die wesentlichen Eigenschaften der unterschiedlichen Skalenniveaus und unterscheiden dabei insbesondere nominalskalierte, ordinalskalierte und metrische (intervall- und verhältnisskalierte) Variablen. Sie stellen Zusammenhangs-, Unabhängigkeits- und Unterschiedshypothesen, auch zu gesellschaftsrelevanten Fragestellungen, bezüglich je zweier Variablen auf.
- erläutern anhand von Streudiagrammen die Grundidee der linearen Regression und stellen Gleichungen von Regressionsgeraden auf, um Werte von Variablen im Sinne einer Vorhersage zu schätzen. Sie berechnen die Werte von Korrelationskoeffizienten und interpretieren diese als Maß für den Zusammenhang zweier Größen. Dass bei der Betrachtung dieses Zusammenhangs Fehlinterpretationen auftreten können (z. B. Simpson-Paradoxon), weisen sie anhand von geeigneten Beispielen graphisch und rechnerisch nach.
- beschreiben das grundsätzliche Vorgehen beim Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest oder beim t-Test und bestimmen mithilfe des betrachteten Testverfahrens bei geeigneten Beispielen von Datensätzen p-Werte unter Verwendung einer Statistik-Software. Sie interpretieren ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- prüfen mediale Darstellungen von Daten auf Korrektheit und analysieren den manipulativen Charakter fehlerhafter Darstellungen anhand typischer Beispiele.